

國立臺灣師範大學特殊教育學系
特殊教育研究學刊，民 94，29 期，113-126 頁

數學學習障礙學生的診斷與確認

柯華葳

國立中央大學

摘 要

本研究以基礎數學概念評量篩選 1226 位經班級老師提名可能有學習障礙的國民小學學生，其中有 71 位數學學習障礙學生。這些學生智力一般，閱讀能力在中等或中等以上，但是在數學運作上有困難。針對二、三、四年級共 10 位學生，研究者進行一週三次，每次 40 分鐘的密集教學。經過密集的加法和減法練習，學生或許可以正確答題，但其解題所花費的時間顯示他們有計算技能自動化的問題。解題時，這些學生需要藉助外力如手算與點頭。此外他們亦有困難遷移所學。本研究肯定在國民小學裡有閱讀能力在一般以上的數學學習障礙學生，需要老師和父母提供特別的教學輔導。

關鍵字：數學學習障礙、基礎數學概念評量

* 本研究經國科會 NSC-89-2614-S-194-001，90-2614-S-194-001 補助，特此致謝。

研究背景

數數 (counting) 與加、減是日常生活中必備的能力。可能因為這些技能的必需性與普遍性，它們似乎不被認為是有困難習得的能力。事實上，在學校中數學是很多學生的煩惱與憂慮。數學成績的好與壞被學生、家長及老師當成智力高低的指標。數學為什麼學的好或學不好，有學者提出是動機、教學品質（包括教師對數學及對學生學數學的看法）等因素的影響（Rivera, 1977; Ginsberg, 1977）。除動機和教學因素外，過去許多針對數學學習的研究指出一般學生在數學上會犯的錯誤，如會操作程序但沒有概念上的理解（Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989）；學生有系統性的錯誤（例如 Brown & Burton, 1978 提出學生最常發生的減法運算錯誤）。只是這些研究沒有特別指出，有學生學習數學有根本上的困難。而在 DSM-III-R (Diagnostic and statistical manual of mental disorders, 1987) 中是有針對數學學習障礙 (mathematical disabilities) 給的定義：

1. 在校一般學習能力及智力符合預期，但以個別化的標準測驗測得的數學技能 (arithmetic skills) 與預期應有的標準相去有一段距離。

2. 上述缺失會影響這位學生的學業成就以及在日常生活中與數學有關活動的表現。

3. 上述的表現並不是因為視覺或聽力以及神經系統問題所造成的。

根據國外的統計 (Geary, 1993; 引自 Badian, 1983)，約有 6.4% 的小學生和中學生有學習數學的困難，是所謂的數學學習障礙。至於算數學學習障礙 (Arithmetical learning disability, AD)，推估約有 5%-8% 的兒童有此學習困難 (Geary, 2003)。

國內特殊兒童 (國小階段, 2004) 普查指

出，學習障礙學生 (包括疑似學習障礙) 有 8693 人，佔特殊教育人口 (國小階段, 35624 人) 的 24%。至於其中有多少比例的學生是數學學習障礙者，則無類別上的統計。國內過去針對學習障礙兒童的研究較多以閱讀障礙為主 (例如柯華葳、洪儷軒 (編輯), 民 88)，尚未有學者有系統的研究數學學習障礙者的特徵與學習。本研究擬從較基本的問題開始探討，找出數學學習障礙學童的特徵，以為診斷與教學的參考。

文獻探討

較早關於數學學習障礙的文獻，也是經常被引用的為 Kosc (1974) 提出的「發展性數學技能障礙」(developmental dyscalculia)。命名為發展性是要有別於成人因腦傷造成的數學技能障礙 (postlesional dyscalculia)。Kosc 設計不同的數學測驗在捷克 (Czechoslovakia) Bratislava 14 所學校測 375 位 11 歲學生。Kosc 首先排除智能或其它能力有問題的學生，而後將發展性數學技能障礙分成：

1. 語言上數障 (verbal dyscalculia)：不能以口語表達，如命名數學符號和數學操作。

2. 實物操作數障 (practognostic dyscalculia)：不能以數學操作實物，如數算手指積木等。

3. 語義數障 (lexical dyscalculia)：不能閱讀數學符號。

4. 圖象數障 (graphical dyscalculia)：不能以寫的方式操作數學符號。

5. 理解數障 (ideognostical dyscalculia)：不能理解數學概念。

6. 運算數障 (operational dyscalculia)：運算程序上有困難。

Kosc 在 375 位學生中找出 24 位學生 (佔 6.4%) 有上述一種或多種的數學學習障礙。

對於數學學習障礙的分類，從 Kosc

(1974) 研究以後不算少數。但是要達成怎樣的標準才算是數學學習障礙？研究上對於數學學習障礙者的篩選標準，基本是以智力成績在一般水準中，其數學標準測驗成績在一個標準差之下，如數學推理成績 (mathematics reasoning) 連續兩年 (小學一年級和二年級) 都在百分等級 35 以下者 (Geary, Hamson, & Hoard, 2000) 或是在一個年級以下者 (Russell & Ginsburg, 1984) 為數學學習障礙者。

國內常被引用的學習障礙鑑定標準有 (洪儷瑜, 2000, p.184) :

1. 差距標準，包括(1)能力與成就間的差距。(2)學業成就間的差距。(3)個體內各項能力的差距。

2. 排除標準，排除由感官缺陷，智能不足，情緒困擾或缺乏適當學習環境所造成的學習困難者。

差距標準的計算如 (林秀柔, 民 78; 蕭金土, 民 84) :

1. 年級差異：學生若智力正常，但學業成就水準低於一或兩年則疑為學習障礙。

2. 期望公式：以智力商數預估學生的表現期望，再比較成就水準與預期水準的差距。

3. 標準分數：將智力測驗和成就測驗化成 z 分數，再比較兩個 z 分數的差異。

4. 迴歸分析：以統計方法在智商成績和成就分數間算出一個預測方程式，以回歸公式計算出某一智商分數的回歸成就分數分佈，並以估計標準誤建立預期成就的標準。

林秀柔 (民 78) 曾比較以標準分數 (智商成績標準分數比數學成績標準分數大 1.5 個標準差)、迴歸分析 (以智力成績預估成就，比較與實際成就間差距大 1.5 個估計標準誤)、和學校鑑定法 (由老師推薦班上數學平均成績低於 80 分以下，智力一般者 2 至 3 名) 所找出的學習障礙學生。結果指出上述三種鑑定方法所找出的學生符合林氏自編的數學學

習障礙檢核表標準的百分比在 26.8% 至 41.8% 之間。蕭金土 (民 84) 則以不同的數學測驗成績作迴歸分析，所得數學學習障礙學生的一致性僅有 12.96%。

以分數差距或是迴歸挑選學習障礙學生最大的問題在採用不同的測驗可能得到不同的結果。其次是，無法顯示出主要的障礙問題，自然就無法確定是否找出有主要缺失的個體。研究者需要找出數學學習障礙者的特徵，也就是他們與其他學生在數學學習與表現上不同的地方。

為了解數學學習障礙者在數學表現、數學概念以及計算上的特徵，Russell 和 Ginsburg (1984) 將他們與一般智力的同年級學生和低一個年級的學生做比較。Russell 和 Ginsburg 呈現了五類 14 種與數學有關的評量。第一類是非正式的數學概念與計算，包括比大、哪一個數較接近目標數、心算和估算。這四項中數學學習障礙者只在心算一項表現比同年級學生差。第二類是以 10 為概念及數算，包括以五、以十為單位計數、說出大鈔的數量是由幾個百、幾個十所組成、十、百、千位數的乘、比較位數相同數的大小以及數值表徵。結果五項中，數學學習障礙者在說出大鈔的數量是由幾個百和幾個十所組成、十、百、千位數的乘表現比同年級學生差。第三類是借位和進位與錯誤辨識，結果，數學學習障礙者表現都比同年級學生差。第四類是數學事實，他們表現比低一年級學生及同年級學生都差。第五類解計算題策略與文字題，結果在文字題上，數學學習障礙者表現比低一年級的學生和同年級學生差，其中又以複雜減法題和有不相關訊息文字題的表現最差。整體而言，數學學習障礙者的數學表現比同年級學生差，但最顯著的問題在他們的數學事實抽取和複雜文字題解題上比低一年級的學生都差。

其他研究者 (如, Jordan & Montani, 1997;

Rouke, 1993) 以及 Geary 和其同事整合各類比較數學學習障礙學生和其他學生的文獻，也肯定數學學習障礙學生主要的問題是數學事實提取有困難，在數數過程中也有較多錯誤發生 (Geary, 1993; Geary, Hamson, & Hoard, 2000)。不過，在數學事實回憶上，若不以時間為能力上的要求，數學學習障礙學生還是可以做對的 (Jordan & Montani, 1997)。進一步觀察低年級學習障礙者的計算行為，Geary (2003) 發現數數時，他們大多數用手指或口數，且由大數數起，而隨年級的增加，使用的數數策略不太有改變。

總結文獻，數學學習障礙學生至少有兩個層面的問題：一是解決數學問題時計算程序的技能，另一是長期記憶系統中表徵與抽取數學事實的困難 (Geary, 1993)。其背後認知的差異，根據 Geary (1993、2003) 依文獻及自己與同事的研究，將數學學習障礙分為三類，語意記憶類、程序記憶類以及視空間記憶類。第一類與閱讀障礙一起發生。後兩類則可能不與閱讀障礙一起發生 (表一)。Geary 也推論三類數學學習障礙可能牽涉到的腦運作部位，指涉數學學習障礙有其神經基礎。

近年有針對腦傷病人的研究指出大腦中負責數學運作的區域 (如 McCloskey, Caramazza,

& Basili, 1985; Sokol, McClosky, Cohen, & Aliminosa, 1991; Dehaene & Cohen, 1997)。例如 Sokol 等人 (1991) 發現左腦傷者有嚴重語言缺失，對於 99 乘法題 (以印刷的數字呈現題目) 有兩種表現。一是回答 0×0 和 $0 \times N$ 這一類問題沒困難；但對另一種題目：任兩個位數字相乘 ($M \times N$) 就表現出隨意的結果。這讓 Sokol 等研究者對乘法的學習與記憶提出一個模式：事實記憶 ($M \times N$) 與規則記憶 (0×0 , $0 \times N$) 是分開運作的。這結果與上述數學學習障礙的特徵之一相呼應，似乎指向記憶數學事實有一特別機制，數學學習障礙學生或許如腦傷病人在這機制上的表現是有困難的。Dehaene 和 Cohen (1997) 則觀察到腦中有兩個路徑處理算術問題，一是直接路徑，直接抽取數學事實，位於左腦皮質。這與 Geary (1993) 對語意記憶的神經系統推測相似 (表一)。或許兩者之間是有關聯，但需要在數學學習障礙學生身上求證。另一則是間接路徑，需要用到數學數量表徵與語意知識，位於左右腦的頂葉區。

若數學學習障礙有其神經基礎，數學學習障礙者的困難隨著發展是否有改善的空間？Geary (1990) 曾追蹤小學一年級學生中有學習障礙者 (learning disabled, LD) 至二年級，這些

表一 數學學習障礙亞型

問題層面	語意記憶	程序	視空間
認知與表現	1.提取數學事實頻率低 2.提取錯誤率高 3.正確率不系統呈現	1.使用不成熟程序 2.錯誤使用程序 3.不理解所使用程序背後的概念	1.有困難空間表徵數學訊息如排列 2.誤解空間表徵的數學訊息
神經系統	1.左腦功能傷 2.視丘(?)	1.左腦功能傷(?)	1.右腦功能傷
與閱讀障礙關係	與 RD 一起發生，特別是語音 RD	尚須進一步確認	不與語音 RD 一起發生

(翻譯自 D. Geary, 1993), (?) 表尚須進一步確認

LD 學童都有數學學習障礙者的特色。Geary 發現這一群學生可以分為兩組，一為改進組 (LD-improved)，一為不變組 (LD-no change)。兩組在簡單數字計算的策略使用上有差異。不變組較多使用無效的策略且研究者在其解題反應或反應時間上較找不出一模式 (pattern)。依 Geary (2003) 的說法，不變組才是數學學習障礙者。

綜合上述國外文獻，我們看到有學生在簡單的數學上是有學不到的困擾，這些困擾反應在抽取數學事實有困難、以手指計算以及未自動化的計算表現上 (Geary, 2003)。而這些困難似乎有其神經基礎，因此也可能帶出經過時間或是訓練仍然「不改變」的現象。

上述國外研究所定義數學學習障礙學生基本上都是學習障礙學生伴隨有數學學習上的問題或是有 ADHD 的困擾 (Geary, 2003)。因此其中不乏可能有因文字 (閱讀障礙) 造成數學處理上的困難 (如, Russell & Ginsburg, 1984)。為澄清數學學習障礙學生的數學表現，本研究將依教育部 (民 87) 公佈學習障礙鑑定標準進行篩選，找出只有數學學習障礙但無閱讀障礙的學生並進行教學，以確認數學學習障礙學生的特徵，以供未來診斷與教學輔導之參考。

研究方法

一、學生篩選

(一) 篩選流程

本研究採用柯華葳和邱上真 (民 89) 依據教育部公佈 (民 87) 之身心障礙及資賦優異學生鑑定原則鑑定基準中之學習障礙學生鑑定原則鑑定基準所擬學習障礙篩選流程，進行篩選工作。篩選流程如下：

1. 請學校老師填寫「特殊需求學生特徵檢核表」(洪儷瑜, 民 89)，作一全面特殊性問題的收集。

2. 由老師所填寫「特殊需求學生特徵檢核表」中找出在學習項目下有被勾選的學生。

3. 安排老師推薦的學生接受評量，評量包括：中文年級認字量表、基礎數學概念評量、閱讀理解困難篩選測驗 (測驗請見篩選工具說明)。

4. 由上述學生中找出有閱讀困難和數學困難的學生。接著再針對這些疑似學習障礙的學生作瑞文氏彩色圖形智力測驗和畢保德圖畫詞彙測驗以確認他們智力在一般以上 (含一般)。

(二) 篩選工具

上述流程中所使用的測驗如下：

甲、團體施測部分

1. 瑞文氏彩色圖形智力測驗：由俞筱鈞 (民 82) 修訂自英國 J. C. Raven 所編的瑞文氏彩色圖形補充測驗 (Colored Progressive Matrices Test 簡稱 CPM)，受試者圈選出適當的圖塊填入缺塊的圖片中。本測驗的再測信度為.95，折半信度.92，同時效度：比西量表相關為.73；畫人測驗相關為.32；與學業成績相關為.17~.40。

2. 閱讀理解困難篩選測驗：由柯華葳 (民 88a) 編製。本測驗目的在偵測小學學生閱讀理解困難，排除閱讀歷程中會妨礙閱讀理解的其他成分，如認字。題目類別如下：字意題 (由上下文抽取字意)，命題組合題 (處理不同命題中重複出現的概念或代名詞) 以及理解題。適用於國小二年級至國小六年級。本測驗與國語文能力測驗中的閱讀理解測驗相關係數皆達 $p < .01$ 的顯著水準；和畢保得的圖畫詞彙測驗、中文文字認字評量的相關也都達 $p < .01$ 的顯著水準。與注音符號有關的測驗，如：聲母、韻母的分辨，聲韻轉錄的相關也是達 $p < .01$ 的顯著水準。

3. 基礎數學概念評量：由柯華葳 (民 88b) 編製。本測驗目的在偵測兒童處理基礎數學運算上的困難，為一計時的測驗。題本有 12 個分測驗包括：個位數字比大、比小、個位數字加

法、個位加十位進位加法、個位數字減法、十位數字減個位數字(借位,十位數字分別是1、2、6)、九九乘法、三則運算、空格運算和文字題。成績計算分為兩部分:(1)每個分測驗答對數與全部題數的比例(答對/全部),這表示在固定時間內答對的比例。(2)每個分測驗答對數與答完題數的比例(答對/答完)。若學生在能做到的題目中答對比例高,表示他是有能力做,但是有自動化的問題。一般學生,不論年級,在個位數字加法、個位加十位進位加法、個位數字減法、十位數字減個位數字等題形答對/全部的通過率在80以上,而答對/答完的通過率在90左右。本評量效標關聯效度是以學校的數學成績為效標與本測驗答對/答完的成績求相關,二至六年級相關係數分別在.43至.83之間,皆達統計上顯著水準($p < .01$)。建構效度為各年級高、低分組在各分測驗上表現都有統計上顯著差異($p < .01$)。高分組為成績在各年級樣本前10%者,低分組則為在後10%者。

乙、個別施測部分

1.畢保德圖畫詞彙測驗:由陸莉及劉鴻香(民83)修訂 Peabody Picture Vocabulary Test 而成。受試者在聽到一個詞彙後,要在四個圖形中選出代表該詞彙意義的圖片。本測驗的再測信度,甲式為.90,乙式為.84。折半信度:甲式為.98~.97,乙式為.90~.97,複本信度為.60~.91。同時效度:甲乙兩式與魏氏兒童智力量表語文智商之相關皆為.60,與非語文智商相關分別為.44與.62,與全量表智商相關為.61與.69,詞彙測驗量表相關為.55與.48。

2.中文年級認字評量:由黃秀霜(2001)編製。本認字量表指在評量學生的認字量,採個別施測,以口頭讀字的方式評量在沒有上下文脈落下學生的認字能力。適用於國小一年級至國中三年級。再測信度為.81~.95($p < .001$),內部一致性信度 Cronbach's α 係數為.99

($p < .001$)。折半信度為.99($p < .001$)。建構效度:以橫斷方式進行國小至國中9個年級之差異考驗,其差異非常顯著($F = 1020.93$, $p < .001$)。效標關聯效度:在校國語成績之相關係數介於.36($p < .05$)~.76($p < .001$)呈現之相關值顯示中度至高度之關聯。國小一至六年級中文年級認字量表與標準化國語文成就測驗相關為.48~.67($p < .001$),學業系列性向測驗之國文測驗與測驗之相關為.49~.64($p < .001$)。依據本評量指導手冊說明,PR在25以下者可以考慮為認字能力薄弱學生。

(三)篩選結果

在嘉義市,透過班級教師轉介,共有1226位學生被推舉出來疑有學習上的困難。經排除有明顯的生理現象以及一年級學生,研究者對890位兒童進行篩選測驗。診斷結果,疑似學習障礙者有593人。593人中,性別上,男生428人,佔72%,女生165人,佔28%。年級分佈上,二年級有130位、三年級有147位、四年級有124位、五年級有92位、六年級有100位。研究者以在基礎數學概念評量上有一般學生以上表現,但在中文年級認字評量或閱讀理解困難篩選測驗表現在一般以下者為閱讀障礙學生。相對的,則為數學學習障礙學生。若在數學和閱讀測驗上都在一般水準以下但是智力測驗成績在一般水準則為雙重障礙者。這些學生可以清楚分為閱讀障礙者有28%,數學學習障礙者有12%,其餘60%學生為兩種障礙都有。

與嘉義市全部學生數比較,學習障礙人口佔全市小學生人數3.18%。比例上似乎低於上述國外研究的比例。但是與美國1989—1990所公佈的學習障礙學生佔學校學生的3.62%(洪儷瑜,2000)較接近。

二、密集教學與觀察

為進一步確認數學學習障礙學生的特徵,研究者邀請上述所篩選出來的學生參與教學,

採用一對一密集的數學教學並記錄數學學習障礙學生每一次作業情形，探討他們學習期間的改變。在此將教學觀察的資料與個案結合，說明數學學習障礙。

(一) 教學內容與過程

研究者聯絡四所學校，將篩選出來疑似數學學習障礙兒童名單交給各班級任導師，並告知有一連續四周，每週三次（隔一天一次）的補救教學活動，請告知家長並簽同意書讓子女參加。結果有 10 位學生參加，分別是二年級 5 位、三年級 2 位、四年級 3 位。其中女學生，三年級一位，四年級兩位，其餘皆是男學生（學生基本資料請見表二）。本研究兩位助理以一對一方式進行教學，每一次 40 分鐘。教學基本上

是給練習單，上面有同類型題目 5 至 10 題。每一練習單交給學生後，助理計時並記錄學生如何運算。學生完成一張練習單後，會詢問其運算方式，並作檢討。一張做完再做下一張練習單。每一次使用的練習單由 5 張至 13 張不等，完全看學生的速度與精神。第二次一開始會複習上一次的題型。教學原則以學生在**數學基礎概念評量**上表現不佳的題型開始，循序漸進。例如，若學生在進位加法上有困難，則先提供不進位加法作為練習，而題目的安排，以進加為例，先是十位數為 1，而後十位數 2，十位數 3 等直到學生的速度和正確率達到一個穩定的狀態。

表二 10 位疑似數學學習障礙學生資料

學生編號	認字百分等級	閱讀理解通過率	數學% 做對/全部	數學% 做對/做完
2-1 (C)	89	61	60	77
2-2 (CH)	72	61	48	83
2-3 (S)	56	56	40	75
2-4 (LL)	81	33	51	93
2-5 (P)	77	28	49	79
3-1 (YA)	73	56	76	95
3-2 (Y)	87	78	48	58
4-1 (L)	41	80	52	93
4-2 (TS)	53	70	67	84
4-3 (CHE)	71	55	73	92

這 10 位學生的基礎數學概念評量成績與同年級一般學生比都偏低（柯華葳，民 88b），表二顯示這些學生也都有自動化的問題（做對/做完分數比做對/全部分數高）。例如#3-1 做對/全部通過率雖有 76，但有自動化問題。這些學生的語文表現在認字（黃秀霜，2001）和閱讀理解（柯華葳，民 88a）則屬一般能力上。其中雖有閱讀理解成績不佳者如#2-4 和 #2-5 但是他們的認字百分等級在 75 以上。或是有學生認字不佳如#4-1 但是其閱讀理解通過

率是 80%。基本上這些學生都不算是閱讀障礙者。而依據基礎數學概念評量，他們主要的數學問題在進位加法和借位減法上。

下面將分析教學過程中學生使用的運算方法、方法上的轉換和計算時間與正確率的改變。

(二) 教學對數學學習障礙學生的成效

1. 教學成效

經過 10 至 12 次教學，學生最後一周都進入借位減法單元。教學結束時當天，研究者給學生再作一次不同十位數的借位減法，若學生

可以正確答對，且有時間，再給一張百位數減個位數的減法（如 $134-6$ ）10 題，以檢驗其學習遷移能力。結果是：

(1) 正確完成借位減法，但沒有時間做百位減個位的有 2-1、2-2、3-1 三位。

(2) 正確完成借位減法，但百位減個位有錯誤的有 2-4、3-2、4-1、4-2、4-3 五位。

(3) 無法正確完成借位減法者有 2-3、2-5 兩位。

換句話說，經過教學，雖有八位學生可以正確完成兩位數減個位數的借位減法，但是不保證他們可以正確的做百位減個位的借位減法。

2. 學生使用的運算方法

(1) 基本上學生都使用手指頭幫助計算，並輔以「點頭」、「口數」、「心算」、與直式列式。

a. 由大數往上加（#2-1，2-2，2-3，2-4，2-5，3-2，4-1，4-3）。

b. 減法先比出大數所代表的手指，再逐一扳下指頭（#2-1，2-3，2-4，2-5，3-1，3-2，4-2，4-3）

(2) 計算時，學生亦採用「分解」數字幫助計算，多數拆解是以 10 或 5 為單位。

例如： $9-2=$

a. $9=5+4$ 、b. $4-2=2$ 、c. $2+5=7$ （a.b.c. 表先後步驟，#2-2）

又例： $11-6=$

a. $11=10+1$ 、b. $10-6=4$ 、c. $1+4=5$ （#2-2）

包括以直式運算也拆解數字，如 $88+63$ （#2-2）。

$$\begin{array}{r} 80 \\ +60 \\ \hline 140 \\ +8 \\ \hline 148 \\ +3 \\ \hline 151 \end{array}$$

(3) 學生也有直接抽取數學事實的，如不進位加法（例#2-1）或是 10 減個位數字，其中以規律的計算如 $3+3$ 、 $4+4$ 、 $5+5$ 兩個數字一樣的计算時間最短，正確率也最好。

(4) 口語上的輔助，例如#2-1 計算時除了使用手指，口頭上會說（計算 $9-4$ ）：「 $10-1=9$ 、 $5+4=9$ 。」

(5) 學生也學到某些解題策略，例如同一次練習借位減法（#3-2），十位數分別是 1、3、5、9。#3-2 將十位先填上（分別為 2、4、8）再計算，但其運算時間並未縮短，十位數為 2 的計算時間是 2'09"、2'04"、十位數為 5 時間為 1'54"、1'57"、十位數為 9 時間為 2'19"、2'21"（每次 10 題，練習兩次）。除計算時間未明顯減少，且有錯誤出現，如 $31-4=26$ 、 $56-7=48$ 等。

(6) 學生每次練習所發生的錯誤不一致，例 #2-3， $6+9=17$ （第二次）， $6+9=14$ （第三次）；#2-5， $16-7=8$ （第一次）、 $16-7=6$ （第二次）、 $16-7=10$ （第七次）；#3-2， $11-2=8$ （第一次）、 $11-2=2$ （第三次）、 $11-2=8$ （第五次）。

由第一次到最後一次教學（因學生出席狀況而異，最少 10 次），不論學生採用何種方式計算，都有清楚可以觀察到的數算行為。當學生拿到練習單的第一時間幾乎都以手計算，有的加上口念或輔以點頭數算。經研究助理提醒，學生是可以換成其他方式，但是由第一次到最後一次練習先借外力如手指來數算的行為未變。這些觀察與 Geary（2003）的觀察資料是一致的。以手指或其他外顯行為輔助簡單計算的行為在 4、5 歲兒童身上常被觀察到，但隨著年齡增加，大多數學生會直接抽取數學事實（Siegler, 1988）。顯然，這一批數學學習障礙學生在簡單計算上表現出較無效的計算方式。

3. 計算時間與正確率

在經過多次練習後，多數學生答題正確比

率增加，但是計算所使用的時間沒有明顯改善。一般來說，這些學生計算兩位數加一位數的進位加或兩位數減一位數的借位減，當題目只有 10 題時，所需時間平均在 1'30"至 2'30"之間，有的學生有些題目練習超過 4 分鐘，如，#2-4。由計算時間觀察學生，有以下特色：

(1)固定題型練習有幫助，一換題型計算速度就慢下來

學生在同一時段內的練習可以增加計算速度，例如，#2-1 同一天連續作十位為 1 的練習，第一次 10 題的時間 2'01"、第二次 1'12"、第三次 1'02"、第四次 1'28"。但當換不同作業內容時，例如，

- a.由不進位加法換到進位加法，或
- b.由十位為 1 的借位減法改作十位為 2 的借位減法，或
- c.同一時間內換不同的題型練習，學生完成的時間又拉長了。

以#2-4 為例，同一時間內連續作十位為 1 的減法練習（第六次上課，前五次練習進位加），第一次 10 題的時間 3'08"、第二次 3'24"、第三次 3'13"、第四次 2'28"、第五次 2'18"、第六次 2'44"。第七次上課，練習十位為 4 的減法練習，第一次 10 題的時間 4'、第二次 3'37"、第三次 2'15"、第四次 2'43"。

再以#2-3 最後一次（第 10 次上課）的表現為例，說明同一時間內有不同的題型，學生完成的時間又拉長了。

第一份練習單，2'10"，個位進加（例：9+8），用頭點算、用拆解。

第二份練習單，3'02"，個位進加。

第三份練習單，3'24"，不借減。

第四份練習單，4'55"，進加（例：13+8）。

第五份練習單，10'51"，借減（例：13-4）用手比 10-4，再加上 3。

這個特徵如 Geary (1990) 所謂的不變組，較多使用無效的策略，在其解題反應或反應時

間上較找不出系統。

(2)學習遷移有困難

當然有學生練習後在某一項目上有進步，例如，#4-1 最後可以以少於 40"的時間完成 10 題以 10 減個位數的題目。#4-2 借位減法由十位 2 至 9 的練習時間為到最後一次上課的練習大約在 50"內可以正確完成，是進步最多的一位學生。但是當助理提供他三位數減個位數的借位減法（百位數為 1，例：134-6），兩次各 10 題，其運算時間又拉長，分別為 1'39"和 1'08"，且有錯誤。其餘學生 2-4、3-2、4-1、4-3 如教學成效中所述，在百位數減個位數（只在十位借位）上都有錯誤發生。

討論

由上述分析，我們肯定在小學有學生智力一般，沒有閱讀的困難但是有學習數學基本概念與運作上的學習障礙。他們的表現整理如下：

1.在大部分基礎數學概念分測驗的通過率（作對/全部）未達各年級的平均通過率甚至未達及格的標準（低於 60%）。

2.在某些題型上若計算他們在答完題目中的答對題數，他們的答對率或許達及格標準，但其運算速度比一般學生差，表示運算未自動化。

3.他們運算的策略主要是以手數、口數或是點頭來計數。雖經過提醒，他們會改用不同的計算策略，但是每次一開始練習，他們會習慣的伸出手指來計算。

4.他們也會拆解數字再進行計算，只是拆解程序似乎讓計算更複雜而造成一些錯誤。

5.經過多次練習，數學學習障礙學生的錯誤率可能降低，甚至可以沒有錯誤，但是運算的時間沒有明顯改進。

6.即使在每一次同一組題型練習中速度會稍微變快，但是一換題型包括同是進位加或是

借位減，只有十位數字的改變，都會讓這些學生計算的速度再次慢下來。

7. 在他們屢次的運算錯誤和計算時間上不容易整理出系統的反應模式。

由教學與練習得不到進步的狀況來看，這些學生是有數學基礎概念學習上的困難，這回應教育部鑑定基準「不是一般教學可以改善」的要求，也是國外文獻所觀察到的現象（例 Geary, 2003）。

由上述觀察，我們肯定只有數學學習障礙但是沒有閱讀障礙的學生在基礎數學計算表現上，除了他們的成績不及同年級學生的表現外，他們依賴手指計算，較少表現出直接提取數學事實的能力。也因此，他們計算時間長於同年級兒童。基於少直接提取數學事實，且時計算間長，表示他們運算不自動化。就是幾經練習後，自動化仍是他們的問題。

由於數學學習障礙學生的數學錯誤似乎沒有規則可循且無自動化現象，研究者推論他們學習計算時無法類化所學，以致於無法遷移。數學學習障礙兒童在某些題型上可以做對一些題目，但做對這些題目的經驗不保證他們在同一類型的每一題都可以答對。為什麼？是不是因為每一題對他們來說都是新的題目，也就是說，他們在練習中沒有類化出解題的原則，以致無法自動化。這表現在有困難直接抽取數學事實且無法遷移。

本研究排除生理問題，也排除閱讀困難，提出在數學基礎概念上有學習障礙的兒童，他們在數學計算上主要困難發生在加法進位、減法和借位減法。其計算特徵是：

1. 與同儕比較，數學學習障礙學生計算時習慣輔以外力，如手指、點頭和口語幫助數算。
2. 他們計算所使用的時間比同年級學生長。
3. 經過短期密集練習，他們運算的速度改善不多。
4. 既使經過練習，在某類題型上可以正確

作答，但一當變化題型，他們的錯誤率增加，計算時間也變長。

本研究推論，數學學習障礙學生的困難在不能類化學習經驗，因而帶出直接抽取數學事實的困難、錯誤和時間反應上不容易整理出一系統、自動化的問題以及學習遷移的困難。這些特徵可以做為使用篩選工具外，行為觀察的依據。

至於人口比例上，以嘉義市學童數來看，沒有閱讀障礙的數學學習障礙學生大約佔學習障礙人口的 0.3%。這比例是不是偏低？由於國內沒有數學學習障礙學生比例資料可供參考，以國外資料來作比較。Kosc (1974) 在 375 位 11 歲學生中找出 24 位學生有數學學習障礙，佔 6.4%。由於 Kosc 使用的工具在文中沒有詳細介紹，研究者由其分類猜測 Kosc 所使用的工具接近一般成就測驗，與本研究採用的篩選工具不一樣。與本研究所使用基礎數學概念評量較接近的是 Geary (2003) 所提出算數 (arithmetic) 學習障礙。Geary (2003) 根據幾個小型算數學學習障礙研究，估計數學學習障礙學生約在 5 至 8% 之間。但是 Geary (2003) 在文中特別提出這些數據中可能包括 ADHD 和閱讀障礙兒童，大約各佔 20 至 30%。若排除 ADHD 和閱讀障礙者，比例大約在 0.3% 至 0.5% 之間，與本研究的推估比較接近。

本研究所提出數學學習障礙學生的特徵著重在基礎數學概念的計算行為。在各種數學課題中，這一批學生只算是「算數學學習障礙」。未來，研究者以為可以進一步探討不同類型的數學學習障礙，如 Kosc (1974) 或 Geary (1993) 的分類，更確認不同類型數學學習障礙學生的特徵。實務上，依據本次研究結果，研究者建議，

1. 家長與老師要接受是有學生在基礎數學如個位數加法、個位加十位進位加法、個位數減法、十位數字減個位數借位減法等計算上有

困難學習。這些學生不能以一般的學習障礙看待之。

2. 為確認所篩選的學生是數學學習障礙者，需觀察一些時間以確定學生即使經一般的教學也無法改善其學習狀況，特別是運算所使用的時間。

參考文獻

- 林秀柔 (民 78)：國小數學學習障礙兒童鑑定方式之研究，國立臺灣教育學院特殊教育研究所碩士論文。
- 柯華葳 (民 88a)：閱讀理解困難篩選測驗。中國測驗學會測驗年刊，46 輯，2 期，1-11 頁。
- 柯華葳 (民 88b)：基礎數學概念評量手冊，教育部，特殊教育工作小組。
- 柯華葳、洪儷軒 (編輯) (民 88)：學童閱讀困難的鑑定與診斷研討會文集。教育部特殊教育小組。
- 柯華葳、邱上真 (民 89)：學習障礙學生鑑定與診斷指導手冊。教育部特殊教育小組。
- 俞筱均 (民 82)：瑞文氏圖形推理測驗系列指導手冊，台北：中國行為科學社。
- 洪儷瑜 (民 89)：學習障礙者教育，台北：心理出版社。
- 洪儷瑜 (民 89)：特殊需求學生特徵檢核表，載於柯華葳、邱上真 (民 89) 學習障礙學生鑑定與診斷指導手冊。教育部特殊教育小組。
- 陸莉、劉鴻香 (民 83)：修訂畢保德圖畫詞彙測驗，台北：心理出版社。
- 教育部 (民 87) 身心障礙及資賦優異學生鑑定原則鑑定基準，台灣，教育部。
- 黃秀霜 (民 90)：中文年級認字量表：指導手冊，台北：心理出版社。
- 蕭金土 (民 84)：國小數學學習障礙學生的鑑定、學習問題診斷及學習策略教學效果之研究，國立政治大學教育研究所博士論文。
- Brown, J.S. & Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, *Cognitive Science*, 2:155-192.
- Dehaene, S. & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic, *Cortex*, 33, 219-250.
- Diagnostic and statistical manual of mental disorders (DSM- III -R) (3rd ed-Revised) (1987). American Psychiatric Association, Washington DC., pp. 41-42.
- Geary, D. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem-solving differences and cognitive deficits. In L. Swanson, K. Harris & S. Graham (eds.) *Handbook of learning disabilities*, NY: The Guilford Press.
- Geary, D. (1990). A componential analysis of an early learning deficit in mathematics, *Journal of Experimental Child Psychology*, 49, 363-383.
- Geary, D. (1993). Mathematical disabilities, cognitive, neuropsychological and genetic components, *Psychological Bulletin*, 114(2), 345-362.
- Geary, D., Hamson, C., & Hoard, M. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability, *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 236-263.
- Ginsburg, H. (1997) Mathematics learning disabilities: A review from developmental psychology, *Journal of Learning Disabilities*, 30(1): 20-33.
- Jordan, N. & Montani, T.O. (1997). Cognitive

- arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematical difficulties, *Journal of Learning Disabilities*, **30(6)**: 624-634.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia, *Journal of Learning Disabilities*, **7**:164-177.
- Mc Closkey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia, *Brain and Cognition*, **4**, 171-196.
- Resnick, L., Neshet, P., Leonard, F., Magona, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal functions, *Journal of Research in Mathematic Education*, **20**, 8-27.
- Reys, R.E., Rybolt, J.F., Bestgen, B., & Wyatt, J. (1982). Processes used by good computational estimations, *Journal of Research in Mathematic Education*, **13**:183-201.
- Rivera, D.P. (1997). Mathematics education and students with learning disabilities: Introduction to the special series, *Journal of Learning Disabilities*, **30(1)**: 2-19,68.
- Rourke, B. P. (1993). Arithmetic disabilities; specific and otherwise: A neurological perspectives, *Journal of Learning Disabilities*, **26(4)**: 214-226.
- Russell, R. & Ginsburg, H. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and Instruction*, **1(2)**, 217-244.
- Siegler, R. (1988) Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development*, **59**, 833-851.
- Sokol, S.M., McKlosky, M., Cohen, N., & Aliminosa, D. (1991). Cognitive representation and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain – damaged subjects, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **17(3)**: 355 – 376.

Bulletin of Special Education, 2005, 29, 113-126
National Taiwan Normal University, Taiwan, R.O.C.

The Diagnosis of Arithmetic Learning Disabilities

Hwawei Ko

National Central University

ABSTRACT

This study is to examine the nature of arithmetic disabilities. The researcher identified school children from 2nd grade to 6th grade who have average IQ scores and average reading levels and yet have difficulty performing basic arithmetic skills such as single or double digits addition and subtraction. With further intensive training, these students' rate of correctness might improve but the speed of arithmetic calculation was still lag behind their counterparts. Also they cannot avoid adopting overt behavior to help counting such as using fingers. It is certain these children have trouble automatizing arithmetic skills. It is suggested that their learning situation should be otherwise considered. Moreover, the basic arithmetic skill test developed by this study is proved valid and reliable. It can be used as a diagnostic tool to coin arithmetic learning disabled children.

Keywords: arithmetic learning disabilities, basic arithmetic skills